Jürgen Pafel Version: April 2014

Quantifikation

Die Quantifikation ist die zweite grundlegende Form der Prädikation neben der einfachen Prädikation. Sie enthält mit den Quantoren eine Klasse von Ausdrücken, deren Semantik sich als besonders schwierig herausgestellt hat. Erst seitdem klar geworden ist, dass es sich bei Quantoren nicht um referierende Ausdrücke handelt, was sich besonders an ihrem Verhalten der Negation gegenüber zeigt, konnte man Fortschritte erzielen. Die Quantifikation ist ein Gebiet, bei dem die Linguistik ganz besonders von Erkenntnissen der Logik und der Sprachphilosophie profitiert.

Die Quantifikation ist neben der einfachen Prädikation, die aus referierenden Ausdrücken und einem Prädikat besteht, die zweite grundlegende Form der Prädikation. Das entscheidende Merkmal von Quantifikationen ist das Vorkommen von Quantoren, zu denen Nominalphrasen mit Determinativen wie *jede*, *viele* oder *einige*, aber auch Nominalphrasen mit Pronomina wie *etwas* oder *niemand* gehören. Die Besonderheit von Quantoren wird deutlich, wenn man die Unterschiede zu referierenden Ausdrücken betrachtet.

Schon in der *Odyssee* von Homer wird ganz bewusst damit gespielt, dass ein Quantor wie *niemand* kein referierender Ausdruck ist. Und zwar in der Episode mit dem einäugigen Riesen Polyphem, der einen um den anderen der Gefährten von Odysseus bei lebendigem Leibe verspeist. Odysseus will er sich für den Schluss aufbehalten, wie er ihm erklärt. In diesem Gespräch fragt er Odysseus auch nach dessen Namen, worauf dieser erwidert, sein Name sei *Niemand*. Odysseus gelingt es, den Riesen betrunken zu machen und mit einem Pfahl zu blenden. Die etwas entfernt lebenden anderen Riesen fragen den vor Schmerz brüllenden Polyphem, was denn passiert sei. Worauf dieser antwortet: »Niemand hat mir ein Leid angetan«. Da wenden sich die anderen Riesen beruhigt wieder ab. Homer macht uns klar: *Niemand* ist kein Ausdruck, der auf einen Gegenstand referiert wie ein Eigenname. Nur ein dummer Riese kann das glauben.

Nun mag *niemand* etwas ganz Besonderes sein, bei *jeder* oder *alle* aber scheint offenkundig eine Verwandtschaft zu den referierenden Ausdrücken zu bestehen. So wie *Sokrates* auf eine Person referiert, so scheint *alle Philosophen* auf alle Philosophen zu referieren. Doch schon Aristoteles ist aufgefallen, dass sich *alle* anders verhält, als man es von einem referierenden Ausdruck erwarten würde. Ob man den Satz *Sokrates hat Selbstmord begangen* verneint, indem man einfach sagt *Sokrates hat nicht Selbstmord begangen*, oder aber umständlicher mit *Es ist nicht der Fall, dass Sokrates Selbstmord* *begangen hat*, das läuft in dem Sinne auf das selbe hinaus, dass beide Aussagen das selbe besagen. Dies ist bei *alle* anders. Nehmen wir den Satz *Doch haben alle Philosophen das Leib-Seele-Problem gelöst* und verneinen wir ihn erst auf die einfache Weise (*Doch haben alle Philosophen das Leib-Seele-Problem nicht gelöst*) und dann auf die umständliche Weise (*Doch ist es nicht der Fall, dass alle Philosophen das Leib-Seele-Problem gelöst haben*). Wenn man ein bisschen über die Sätze nachdenkt, dann merkt man, dass sie Unterschiedliches aussagen. Nehmen wir an, dass es durchaus einige Philosophen gibt, die das Leib-Seele-Problem gelöst haben, auch wenn vielen das nicht gelungen ist. Dann ist der Satz *Doch haben alle Philosophen das Leib-Seele-Problem nicht gelöst* falsch. Aber der Satz *Doch ist es nicht der Fall, dass alle Philosophen das Leib-Seele-Problem gelöst haben* ist wahr (genauso wie der gleichbedeutende Satz *Doch haben nicht alle Philosophen dieses Problem gelöst*). Quantoren sind sensitiv in Bezug auf die Negation, in einer Weise, in der dies referierende Ausdrücke nicht sind. Vereinfacht gesagt macht es bei Quantoren, aber nicht bei referierenden Ausdrücken einen großen Unterschied, ob die Negation dem Ausdruck vorangeht oder ihm folgt.

Nun könnte es ja sein, dass der Unterschied zwischen dem Eigennamen *Sokrates* und dem Quantor *alle Philosophen* allein damit zu tun hat, dass der Eigenname nur auf EINE Person, der Quantor aber auf MEHRERE Personen referiert. Doch auch eine Nominalphrase wie *diese sieben Philosophen*, die auf mehr als eine Person referiert, ist nicht wie ein Quantor sensitiv für die Negation: *Diese sieben Philosophen haben das Leib-Seele-Problem nicht gelöst* und *Es ist nicht der Fall, dass diese sieben Philosophen das Leib-Seele-Problem gelöst haben* besagen genau das selbe.

Weder Aristoteles noch den nicht minder scharfsinnigen Logikern des Mittelalters ist es gelungen, das Problem der Quantifikation zu lösen und damit zu erklären, warum sich Quantoren anders verhalten. Der Grund war, dass sie sich letztlich nicht von der Vorstellung freimachen konnten, dass Quantoren doch in irgendeiner Weise referierende Ausdrücke sein müssen. Erst Gottlob Frege ist es mit dem schmalen, aber bahnbrechenden Werk mit dem Titel *Begriffsschrift* (1879) gelungen, sich von dieser Vorstellung völlig frei zu machen.

Eine einfache Prädikation wie *Sokrates denkt* besteht nach Frege aus einem Eigennamen und dem einstelligen Prädikat *x denkt*, wobei *x*, eine Variable, das einzige Argument des Prädikats ist und für den Gegenstand steht, der denkt. Indem man den Eigennamen *Sokrates* an die Stelle der Variablen *x* setzt, erhält man die einfache Prädikation *Sokrates denkt*. Der Satz ist wahr, wenn das Argument des Prädikats, also *Sokrates*, etwas bezeichnet, das denkt. Die Struktur einer Quantifikation ist nun eine völlig andere. In *Alle Philosophen denken* dürfen wir nicht den Allquantor *alle Philosophen* an die Stelle der Variablen in *x denkt* setzen. Denn dadurch würden wir den Quantor wie einen referierenden Ausdruck behandeln, was, wie wir gesehen haben, nicht adäquat sein kann, da wir damit nicht die beiden verschiedenen Negationsmöglichkeiten erklären können. Die semantische Struktur des Satzes sieht wie folgt aus: »Für jeden Philosophen x gilt: x denkt« Der Satz ist genau dann wahr, wenn *x denkt* wahr ist, egal welchen Philosophen wir mit *x* meinen, wenn m.a.W. die einfachen Prädikationen *Sokrates denkt*, *Platon denkt*, *Aristoteles denkt*, *Hume denkt*, *Kant denkt* u.s.w. wahr sind. In dem Satz *Alle Philosophen denken* referiert der Quantor *alle Philosophen* nicht auf alle Philosophen, sondern gibt an, auf wie viele Philosophen das Prädikat *x denkt* zutrifft, nämlich alle.

[Merkbox]
Quantoren sind Ausdrücke, die entweder angeben, auf wie viele Gegenstände einer bestimmten Art etwas zutrifft (Beispiel: *alle Philosophen*), oder angeben, auf eine wie große Quantität einer Masse etwas zutrifft (Beispiel: *viel Wasser*). Quantoren können zu ganz unterschiedlichen syntaktischen Kategorien gehören. Nominalphrasen, die ein Determinativ wie *jede*, *alle*, *viel* oder *einige* aufweisen, sind Quantoren – also Nominalphrasen wie *jedes Tier*, *alle von uns*, *viel Wasser*, *einige Felsen*. (Achtung! Manchmal bezeichnet man Determinative wie *jede*, *alle*, *viel* oder *einige* als Quantoren. Dies ist jedoch ein rein terminologischer Unterschied, kein Unterschied in der Sache.) Auch pronominale Nominalphrasen wie *niemand* (*von uns*), *etwas* oder *nichts* sind Quantoren. Daneben sind aber auch eine Reihe von Adverbien Quantoren: Lokaladverbien (z.B. *überall*), Temporaladverbien (z.B. *jederzeit*), Frequenzadverbien (z.B. *oft*), Satzadverbien (z.B. *notwendigerweise*) und andere. Und damit ist die Liste keineswegs vollständig (siehe genauer Pafel 2005: §1.2.2).
[Ende Merkbox]

Damit kann Frege nun erklären, warum wir eine Quantifikation auf zwei Weisen verneinen können. Wir können die ganze Quantifikation verneinen (»Es ist nicht der Fall, dass für jeden Philosophen x gilt: x denkt«), wir können aber auch nur einen Teil der Quantifikation verneinen (»Für jeden Philosophen x gilt: Es ist nicht der Fall, dass x denkt«).

Wenn wir jetzt auf das Wörtchen *niemand* zurückblicken, so sehen wir, dass es gar nichts Außergewöhnliches ist. Es setzt sich semantisch aus einer Verneinung (»Es ist nicht der Fall«) und einen Existenzquantor (»es gibt ein x, für das gilt«) zusammen. Der Satz *Niemand hat mir ein Leid getan* ist semantisch wie folgt zu analysieren: »Es ist nicht der Fall, dass es ein x gibt, für das gilt: x hat mir ein Leid getan«

Mit dieser neuen Sichtweise auf die Natur der Quantoren ist es Frege als erstem überhaupt gelungen, das Problem der multiplen Quantifikation zu lösen. Mit multipler Quantifikation hat man es – vereinfacht gesagt – zu tun, wenn in einem Satz mehr als ein Quantor vorkommt. In dem Satz *Jeder Philosoph hat mindestens ein Problem gelöst* kommen mit *jeder Philosoph* und *mindestens ein Problem* zwei Quantoren vor. An der multiplen Quantifikation haben sich alle die Zähne ausgebissen, die Quantoren als referierende Ausdrücke betrachtet haben. Der entscheidende Grund war, dass ein solcher Satz unterschiedliche Lesarten aufweisen kann, ohne dass man dies darauf zurückführen könnte, dass irgendein Teilausdruck zwei unterschiedliche Bedeutungen aufzuweisen hätte. Dies lässt sich an dem Satz von eben demonstrieren, wenn wir die Abfolge der Quantoren ändern. Den Satz *Mindestens ein Problem hat jeder Philosoph gelöst* kann man auf zwei Weisen verstehen: Entweder gibt es mindestens ein Problem, das jeder Philosoph gelöst hat, oder von jedem Philosophen gilt, dass er mindestens ein Problem gelöst hat. Bei der zweiten Lesart des Satzes, aber nicht bei der ersten, ist der Satz wahr, wenn jeder Philosoph ein Problem gelöst hat und es Philosophen gibt, die ganz andere Probleme gelöst haben als andere Philosophen (genauer: Vertiefung Quantorenskopus).

Ohne diese epochale Leistung von Frege wäre der ungeheuere Aufschwung der Logik wie auch der Semantik im 20. Jahrhundert unmöglich gewesen.

[Vertiefung]
Eine Quantifikation besteht aus einem Quantor und dem, worauf sich der Quantor bezieht – seinem Skopus. Den Satz *Alle Philosophen denken* haben wir analysiert als: »Für jeden Philosophen x gilt: x denkt« Der erste Teil ('Für jeden Philosophen x gilt') gibt den Quantor wieder, der zweite Teil ('x denkt') den Skopus des Quantors. In Bezug auf seinen Skopus gibt ein Quantor an, wie viele Gegenstände einer bestimmten Art bzw. eine wie große Quantität einer bestimmten Masse den Skopus wahr macht.

Wir haben im Haupttext gesehen, dass man den Satz *Mindestens ein Problem hat jeder Philosoph gelöst*, der einen Existenz- und einen Allquantor enthält, auf zwei Weisen verstehen kann. Entweder gibt es mindestens ein Problem, das jeder Philosoph gelöst hat, oder von jedem Philosophen gilt, dass er mindestens ein Problem gelöst hat. Bei der zweiten Lesart des Satzes, aber nicht bei der ersten, ist der Satz wahr, wenn jeder Philosoph ein Problem gelöst hat und es Philosophen gibt, die ganz andere Probleme gelöst haben als andere Philosophen. Hierbei handelt es sich um eine Skopusambiguität, was wir genauer sehen, wenn wir die beiden Lesart ganz ausführlich darstellen.

Lesart 1: Es gibt mindestens ein Problem y, so dass für jeden Philosophen x gilt: x hat y gelöst.

Lesart 2: Für jeden Philosophen x gilt, dass es mindestens ein Problem y gibt, so dass: x hat y gelöst.

Bei Lesart 1 ist der Skopus des Existenzquantor: »für jeden Philosophen x gilt: x hat y gelöst«. Das bedeutet, dass der Allquantor im Skopus des Existenzquantors steht. Bei der Lesart 2 ist der Skopus des Allquantors: »es gibt mindestens ein Problem y, so dass: x hat y gelöst«. Hier ist nun der Existenzquantor im Skopus des Allquantors.

Der Satz *Mindestens ein Problem hat jeder Philosoph gelöst* hat demnach zwei Lesarten, obwohl es keinen Teilausdruck gibt, der zwei unterschiedliche Bedeutungen hätte. Die beiden Lesarten ergeben sich daraus, dass die beiden Quantoren des Satzes in unterschiedlichen Skopusbeziehungen zueinander stehen können.

[Ende Vertiefung]

[Vertiefung: Theorie der Generalisierten Quantoren]

Auch wenn man sich darüber im Klaren ist, dass Quantoren keine referierenden Ausdrücke sind, gibt es immer noch mehrere Möglichkeiten, wie man sie semantisch genau analysiert. Im Haupttext haben wir uns an der Art orientiert, wie seit Frege die Wahrheitsbedingungen für Quantifikationen in der sogenannten »Prädikatenlogik erster Stufe« angegeben werden, die grundlegend für die Logik von Quantoren ist. Diese Logik ist erst nach Frege entwickelt worden und weist nur zwei Quantoren auf – den Allquantor ($\forall$) und den Existenzquantor ($\exists$). Einen etwas anderen Blick auf Quantoren erhält man, auch dies ist letztlich auf Frege zurückzuführen, wenn man einen Satz wie *Alle Philosophen denken* als eine Relationsaussage deutet, bei der das Determinativ *jeder* eine zweistellige Relation ausdrückt, die zwischen der Menge der Philosophen und der Menge der Wesen, die denken, besteht. Der Satz ist genau dann wahr, wenn die Menge der Philosophen eine Teilmenge der Menge der Wesen ist, die denken. *Jeder* drückt also die Teilmengenbeziehung aus zwischen zwei Mengen A und B. Entsprechend drückt das Determinativ *ein* eine Relation aus, in der zwei Mengen A und B genau dann stehen, wenn ihre Schnittmenge nicht leer ist.

JEDER(A,B) ist wahr genau dann, wenn $A \subseteq B$ (bzw. äquivalent: $A \cap B = A$)

EIN(A,B) ist wahr genau dann, wenn $A \cap B \neq \emptyset$

Dieses Vorgehen kann man auf beliebige Determinative anwenden, so zum Beispiel auf *die meisten*, das eine Relation ausdrückt, in der zwei Mengen A und B genau dann stehen, wenn die Anzahl der As, die Bs sind, größer ist als die Anzahl der As, die keine Bs sind.

DIE-MEISTEN(A,B) ist wahr gdw. $|A \cap B| > |A - B|$

Die meisten ist insbesondere deshalb ein interessanter Ausdruck, weil man beweisen kann, dass man in der Prädikatenlogik erster Stufe keinen zusätzlichen Quantor definieren kann, der die Bedeutung von *die meisten* haben würde (was aber nicht heißt, dass man in dieser Logik nicht die Bedeutung von *die meisten* wiedergeben könnte mithilfe von Existenz- und Allquantor).

Wenn man *jeder*, *ein*, *alle*, *die meisten* etc. als Relationsausdrücke betrachtet, so kann man sie im Hinblick auf die Eigenschaften untersuchen, die Relationen ganz allgemein haben können (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität etc.). Dies eröffnet ein ganz neues Untersuchungsfeld.

Aus linguistischer Sicht ist an der relationalen Analyse unbefriedigend, dass das Determinativ und das erste Argument (also: *jedes A*, *ein A*, *die meisten A* etc.) semantisch keine Einheit bilden. Syntaktisch ist es ja keine Frage, dass wir es mit einer Konstituente zu tun haben, und zwar mit einer Nominalphrase. Nun ist es formal kein Problem, dies zu ändern und von einer »relationalen« zu einer »funktionalen« Analyse überzugehen, die zu der syntaktische Struktur passt. Bei dieser bildet *jedes* einen Ausdruck, der mit *A* zusammen eine Konstituente bildet, die in *Jedes A ist B* ein Prädikat darstellt, das *B* als Argument nimmt. Da *B* nun selbst ein Prädikat ist, ist *jedes A* ein Prädikat, das ein Prädikat als Argument hat (ein Prädikat, das ein Prädikat als Argument hat, nennt man ein »Prädikat zweiter Stufe«). *Jedes A* bezeichnet die Menge, die alle Mengen umfasst, die A als Teilmenge haben. Dies ist auf Anhieb nicht so leicht verstehen. Wenn man es verstanden hat, wird auch die folgenden Wahrheitsbedingung klar:

(**JEDES**(A))(B) ist wahr genau dann, wenn B Element der Menge ist,
die alle Mengen umfasst, die A als Teilmenge haben.

Dies läuft darauf hinaus zu sagen, dass *Jedes A ist B* genau dann wahr ist, wenn A eine Teilmenge von B ist.

Eine Menge von Mengen nennt man einen »generalisierten Quantor«. Mit *Quantor* ist hier nicht wie bisher ein Ausdruck gemeint, sondern das, was ein solcher Ausdruck bezeichnet. Von *generalisiert* redet man hier, weil mit so einer Konzeption nicht nur *jeder*, *alle* und *ein*, sondern beliebige Determinative analysieren werden können.

[Ende Vertiefung]

[Weiterführende Literatur]
Wer sich dafür interessiert, wie über die Jahrhunderte erfolglos auf unterschiedlichen Wegen versucht wurde, die Semantik von Quantoren zu verstehen, bis dann Frege auf den Plan trat, dem sei Geach (1962) empfohlen. Zur Frage, welche Ausdrücke Quantoren sind sowie zum Phänomen des Quantorenskopus siehe Frey (1993) und Pafel (2005). Eine leicht verständliche Einführung in die Theorie der Generalisierten Quantoren bietet Bach (1980: IV), für Fortgeschrittene ist Gamut (1991: § 7.2) zu empfehlen.

Bach, Emmon (1980): *Informal lectures on formal semantics.* New York: State University of New York Press.

Frege, Gottlob (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens.* Halle: Nebert.

Werner Frey (1993): *Syntaktische Bedingungen für die semantische Interpretation: Über Bindung, implizite Argumente und Skopus.* Berlin: Akademie Verlag.

Gamut, L.T.F. (1991): *Logic, language, and meaning. Volume 2: Intensional logic and logical grammar.* Chicago/London: The University of Chicago Press.

Geach, Peter Thomas (1962): *Reference and generality. An examination of some medieval and modern theories.* Ithaca/London: Cornell University Press.

Pafel, Jürgen (2005): *Quantifier scope in German.* Amsterdam/Philadelphia: Benjamins.